

7 класс

Задача 7.1. На пробежке.

Экспериментатор Иннокентий Иванов вышел с утра на пробежку. Неспеша пробегая по дорожке в парке, он встретил движущуюся навстречу колонну из 10 бегунов. Учёный заметил, что спортсмены пробегают мимо него с интервалом в 2 с. Через некоторое время эта же самая колонна, где-то развернувшись, стала обгонять Иннокентия. В этот раз все спортсмены пробежали мимо учёного в течение 42 с.

1. Каково было расстояние между соседними бегунами в колонне?

2. С какой скоростью бежал Иннокентий по парку, если считать, что она не менялась?

Пообщавшись со спортсменами, учёный выяснил, что скорость их бега всегда равна 18 км/ч, а расстояние между ними в колонне всегда постоянно.

Ответ: 1) 14 м; 2) 2 м/с.

Решение: Пусть v — скорость Иннокентия, L — расстояние между бегунами, а $u = 18 \text{ км/ч} = 5 \text{ м/с}$ — скорость бега спортсменов. Длина всей колонны, соответственно, равна $9L$. Так как при движении колонны навстречу бегуны пробегают мимо учёного с интервалом 2 с,

$$L = (v + u) \cdot 2 \text{ с.}$$

При второй встрече спортсмены пробежали мимо Иннокентия за 42 с, поэтому

$$9L = (u - v) \cdot 42 \text{ с.}$$

Поделим эти уравнения друг на друга и выразим скорость учёного:

$$9 = \frac{42}{2} \cdot \frac{u - v}{v + u} \Rightarrow 9(v + u) = 21(u - v) \Rightarrow 30v = 12u \Rightarrow v = \frac{2u}{5} = 2 \text{ м/с.}$$

Расстояние между бегунами в колонне равно

$$L = (v + u) \cdot 2 \text{ с} = 7 \text{ м/с} \cdot 2 \text{ с} = 14 \text{ м.}$$

Критерии:

- 1) Записана формула $L = (v + u) \cdot 2 \text{ с}$ или её аналог 2 балла
- 2) Записана формула $9L = (u - v) \cdot 42 \text{ с}$ или её аналог 3 балла
- 3) Найдена скорость Иннокентия v 3 балла
- 4) Найдено расстояние между бегунами L 2 балла

Указание проверяющим: Если участник записал длину колонны как $10L$ и произвёл верный расчёт v и/или L в этом случае, то за пункт 2 баллы не ставятся, а пункты 3 и 4 оцениваются независимо. Для контроля, при длине в $10L$ должно получаться $v \approx 1,8 \text{ м/с}$ и $L \approx 13,5 \text{ м}$.

Задача 7.2. Бабушкин подарок.

Однажды бабушка прислала Карлсону три банки варенья — две больших (одинаковых между собой) и одну маленькую (вдвое меньшего объёма). Пригласив в гости Малыша, Карлсон решил съесть подарок, дав гостю маленькую банку, а себе оставив обе большие. Варенье из своей банки Малыш первую треть времени ел со скоростью 4 ложки в минуту, оставшееся время — со скоростью 2,5 ложки в минуту. С какой скоростью Карлсон поглощал содержимое второй большой банки, если первую банку он съел со скоростью 10 ложек в минуту, а начали и закончили друзья в одно и то же время? Количество варенья в каждой ложке у обоих друзей считать одинаковым.

Ответ: 15 ложек в минуту.

Решение: Пусть V — ёмкость третьей банки (банки Малыша) в ложках, а t — время, в течение которого варенье было съедено. Тогда

$$V = 4 \frac{\text{лож}}{\text{мин}} \cdot \frac{t}{3} + 2,5 \frac{\text{лож}}{\text{мин}} \cdot \frac{2t}{3} = 3 \frac{\text{лож}}{\text{мин}} \cdot t.$$

Ёмкость обеих банок Карлсона равна $2V$. Время, за которое он съел содержимое первой, равно

$$t_1 = \frac{2V}{10 \text{ лож/мин}} = \frac{2 \cdot 3 \text{ лож/мин} \cdot t}{10 \text{ лож/мин}} = 0,6t.$$

Следовательно, на вторую банку ушло время, равное

$$t_2 = t - t_1 = 0,4t.$$

Так как время уменьшилось в 1,5 раза при том же объёме варенья, скорость поедания Карлсоном второй банки равна $1,5 \times 10 \text{ лож/мин} = 15 \text{ лож/мин}$.

Критерии:

- 1) Записано выражение для объёма, съеденного Малышом, через доли времени (или его аналог) 3 балла
- 2) Записано выражение для времени t_1 через V и скорость (либо аналогичное равенство) 2 балла
- 3) Найдено время t_1 , выраженное через t (либо аналогичное равенство) 2 балла
- 4) Найдено время t_2 1 балл
- 5) Найдена скорость поедания второй банки Карлсоном 2 балла

Указание проверяющим: Все величины не обязательно могут быть выражены через общее время t (как в авторском решении), его роль в решении учащегося может играть другой параметр. В пунктах 1 и 3 критериев, в этом случае, необходимо заменить t на параметр, использованный учащимся.

Задача 7.3. Угощение для брата.

Пока семиклассника Паши не было дома, его младшая сестра Ариша решила сделать брату сюрприз и слепила из пластилина два пирожных, совершенно **одинаковых по размеру**, но с разными «начинками». В одно из них она положила два стальных, а в другое — три стеклянных шарика. Узнав об этом, Паша взвесил оба пирожных и выяснил, что их массы равны 30 г и 47 г.

1. Чему равна плотность пластилина, который использовала Ариша?
2. Каков объём одного пирожного?

Паша помнил, что размеры всех шариков одинаковы, а масса стального шарика равна 13 г. Плотность стали равна 7800 кг/м^3 , плотность стекла — 2400 кг/м^3 .

Ответ: 1) 1800 кг/м^3 ; 2) 15 см^3 .

Решение: Два стальных шарика тяжелее, чем три стеклянных того же объёма, поэтому пирожное со стальной «начинкой» имеет массу 47 г, а со стеклянной — 30 г.

Два стальных шарика имеют массу 26 г, следовательно, оставшийся 21 г приходится на пластилин. Запишем выражение для объёма пирожного:

$$V = \frac{26 \text{ г}}{7,8 \text{ г/см}^3} + \frac{21 \text{ г}}{\rho_{\text{пл}}}$$

Масса стеклянного шарика равна

$$m_{\text{стек}} = \frac{13 \text{ г}}{7,8 \text{ г/см}^3} \cdot 2,4 \text{ г/см}^3 = 4 \text{ г}.$$

Поэтому во втором пирожном масса пластилина составляет $30 \text{ г} - 3 \cdot 4 \text{ г} = 18 \text{ г}$. Объём такого пирожного равен

$$V = \frac{12 \text{ г}}{2,4 \text{ г/см}^3} + \frac{18 \text{ г}}{\rho_{\text{пл}}}$$

Приравнивая, получаем

$$\frac{26 \text{ г}}{7,8 \text{ г/см}^3} + \frac{21 \text{ г}}{\rho_{\text{пл}}} = \frac{12 \text{ г}}{2,4 \text{ г/см}^3} + \frac{18 \text{ г}}{\rho_{\text{пл}}} \Rightarrow \rho_{\text{пл}} = 1,8 \text{ г/см}^3.$$

Объём пирожного, соответственно, будет равен

$$V = \frac{12 \text{ г}}{2,4 \text{ г/см}^3} + \frac{18 \text{ г}}{1,8 \text{ г/см}^3} = 15 \text{ см}^3.$$

Критерии:

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 1) Найдена масса стеклянного шарика | 1 балл |
| 2) Найдена масса пластилина в обоих случаях | 2 балла |
| 3) Записано верное уравнение для нахождения $\rho_{\text{пл}}$ (или V) | 3 балла |
| 4) Найдено значение плотности пластилина $\rho_{\text{пл}}$ | 2 балла |
| 5) Найдено значение объёма пирожного V | 2 балла |

Задача 7.4. Дальномер.

На выходных учёный Лосяш решил поэкспериментировать. Для этого он взял сосуд с вертикальными стенками, налил туда воду и поместил на некотором расстоянии от её поверхности вертикальный цилиндр. На поверхности цилиндра Лосяш закрепил электронный дальномер, который определяет расстояние h до поверхности воды (схема установки изображена на рис. 7.1а). Учёный стал медленно и с постоянной скоростью опускать цилиндр до тех пор, пока тот не упёрся в дно сосуда. Снимая показания дальномера, Лосяш получил график зависимости h от времени (рис. 7.1б). Определите **по графику**:

1. высоту слоя воды H и расстояние l от её поверхности до верхнего края сосуда в начале эксперимента;
2. отношение площади дна сосуда к площади сечения поршня.

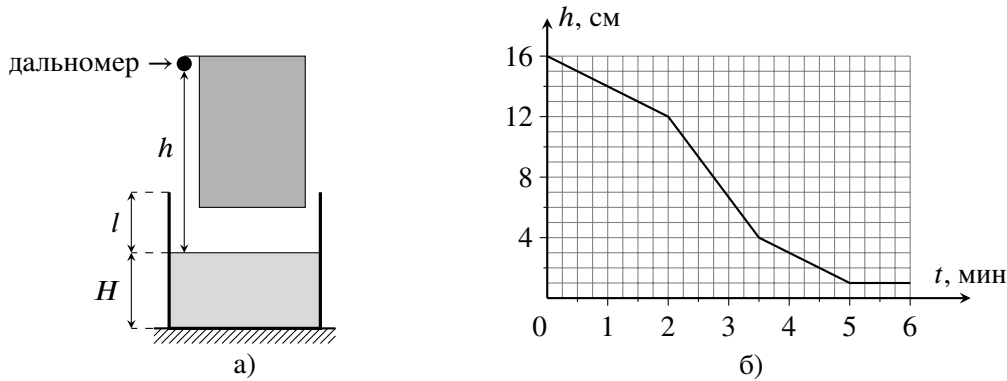


Рис. 7.1.

Ответ: 1) $H = 6$ см, $l = 5$ см; 2) 1,6.

Решение: Первый участок графика соответствует движению поршня до контакта с водой. Найдём скорость движения поршня: $v = (16 \text{ см} - 12 \text{ см}) / (2 \text{ мин}) = 2 \text{ см/мин}$. Второй участок соответствует движению поршня в воде, когда уровень вытесняемой воды поднимается вверх. На третьем участке скорость снова равна v , значит здесь уровень воды достиг края сосуда, и вытесняемая жидкость просто выливается наружу. Четвёртый (горизонтальный) участок показывает, что в этом случае поршень дошёл до дна сосуда и остановился.

От момента касания поверхности воды до контакта с дном поршень двигался в течение $5 \text{ мин} - 2 \text{ мин} = 3 \text{ мин}$. Поэтому начальная высота слоя воды в сосуде равна $H = v \cdot 3 \text{ мин} = 2 \text{ см/мин} \cdot 3 \text{ мин} = 6 \text{ см}$. Высота дальномера над нижним краем поршня равна значению h в момент касания воды (при $t = 2 \text{ мин}$), то есть эта высота составляет 12 см. Когда поршень упёрся в дно сосуда, $h = 1 \text{ см}$, а уровень воды совпадает с верхним краем сосуда. Следовательно, вся высота сосуда равна $12 \text{ см} - 1 \text{ см} = 11 \text{ см}$. Расстояние l от начального положения поверхности жидкости до края сосуда составляет $l = 11 \text{ см} - H = 11 \text{ см} - 6 \text{ см} = 5 \text{ см}$.

Пусть S_1 — площадь сечения поршня, а S_2 — площадь дна сосуда. Поднятие воды до краёв происходит за $3,5 \text{ мин} - 2 \text{ мин} = 1,5 \text{ мин}$. Опустившийся поршень вытесняет объём $V = S_1 \cdot v \cdot 1,5 \text{ мин} = 3 \text{ см} \cdot S_1$. Он же заполняет пространство вокруг поршня до краёв сосуда, $V = (S_2 - S_1)l = 5 \text{ см} \cdot (S_2 - S_1)$. Приравнявая, получаем

$$3 \text{ см} \cdot S_1 = 5 \text{ см} \cdot (S_2 - S_1) \Rightarrow S_2/S_1 = 8/5 = 1,6.$$

Критерии:

- | | |
|---------------------------------------------------------|---------|
| 1) Найдена скорость опускания поршня | 2 балла |
| 2) Найдена начальная высота воды H | 2 балла |
| 3) Найдена расстояние l | 2 балла |
| 4) Записано верное уравнение, связывающее S_1 и S_2 | 3 балла |
| 5) Найдено отношение площадей | 1 балл |

Указание проверяющим: 1) В пункте 4 уравнение также может быть получено, например, путём нахождения скорости сближения жидкости и датчика (по второму участку графика и теоретически). Найденное уравнение, если оно верно, оценивать полным баллом за п.4.

2) В пункте 5 допустимо нахождение учащимся обратного отношения площадей $S_1/S_2 = 5/8$. Балл за это не снимать.

3) Расчёты, основанные на измерениях, проделанных по рис. 7.1а (не по графику), не оценивать!

8 класс

Задача 8.1. Марафонцы.

Крош, Ёжик и Бараш соревнуются в беге на длинную дистанцию. Судья Лосяш зафиксировал, что Крош прибежал к финишу в 14:00, Бараш — в 14:20, а Ёжик — в 15:00. Во сколько стартовали Смешарики, если средняя скорость Бараша равнялась 15 км/ч, а Ёжика — 12 км/ч? Какова средняя скорость Кроша? Все герои стартовали одновременно и бежали по одной дороге.

Ответ: в 11:40, ≈ 17 км/ч.

Решение: Пусть L — длина дистанции. Тогда Крош её пробежит за время $t_K = L/v_K$, Бараш — за $t_B = L/(15 \text{ км/ч})$, а Ёжик — за $t_{\text{Ё}} = L/(12 \text{ км/ч})$. Ёжик прибежал на $2/3$ часа позже Бараша, поэтому

$$\frac{2}{3} \text{ ч} = \frac{L}{12 \text{ км/ч}} - \frac{L}{15 \text{ км/ч}} \Rightarrow L = 40 \text{ км.}$$

Это значит, что, например, Бараш бежал в течение

$$t_B = \frac{40 \text{ км}}{15 \text{ км/ч}} = \frac{8}{3} \text{ ч} = 2 \text{ ч } 40 \text{ мин.}$$

Следовательно, забег начался в 11:40.

Крош бежал $2 \text{ ч } 20 \text{ мин} = 7/3 \text{ ч}$. Его скорость была равна

$$v_K = \frac{40 \text{ км}}{7/3 \text{ ч}} \approx 17 \text{ км/ч.}$$

Критерии:

- 1) Записано уравнение для нахождения L 3 балла
- 2) Найдена длина дистанции L 1 балл
- 3) Найдено время старта 3 балла
- 4) Найдена скорость Кроша 3 балла

Задача 8.2. Физика на YouTube.

Пытаясь повторить опыт, увиденный в Интернете, экспериментатор Иннокентий Иванов положил в калориметр некоторое количество снега при температуре $-20\text{ }^\circ\text{C}$ и налил туда же ртуть при $+25\text{ }^\circ\text{C}$. В результате весь снег в калориметре растаял, в нём установилась температура $0\text{ }^\circ\text{C}$, а объём содержимого калориметра стал в три раза больше, чем первоначальный объём снега. Какова была средняя плотность снега, взятого учёным? Удельная теплоёмкость льда равна $2100\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$, ртути — $140\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$, удельная теплота плавления льда — $330\text{ кДж}/\text{кг}$, плотность воды — $1000\text{ кг}/\text{м}^3$, плотность ртути — $13600\text{ кг}/\text{м}^3$. В рассматриваемом диапазоне температур ртуть является жидкостью. Тепловыми потерями и теплоёмкостью калориметра пренебречь.

Примечание: Снег состоит из кристалликов льда, между которыми есть воздушные полости.

Ответ: $340\text{ кг}/\text{м}^3$.

Решение: Пусть V — начальный объём снега в калориметре, а $\rho_{\text{сн}}$ — его плотность. Тогда масса снега равна $m = \rho_{\text{сн}}V$. Снег, превратившись в воду, будет иметь объём $V_{\text{в}} = m/\rho_{\text{в}} = \rho_{\text{сн}}/\rho_{\text{в}} \cdot V$, поэтому объём ртути, налитой в калориметр, будет равен

$$V_{\text{рт}} = 3V - V_{\text{в}} = \left(3 - \frac{\rho_{\text{сн}}}{\rho_{\text{в}}}\right) \cdot V.$$

Запишем уравнение теплового баланса

$$\begin{aligned} c_{\text{л}}m(0\text{ }^\circ\text{C} - (-20\text{ }^\circ\text{C})) + \lambda m &= c_{\text{рт}}\rho_{\text{рт}}V_{\text{рт}}(25\text{ }^\circ\text{C} - 0\text{ }^\circ\text{C}) \Rightarrow (c_{\text{л}} \cdot 20\text{ }^\circ\text{C} + \lambda)\rho_{\text{сн}}V = c_{\text{рт}}\rho_{\text{рт}} \left(3 - \frac{\rho_{\text{сн}}}{\rho_{\text{в}}}\right) \cdot V \cdot 25\text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow \\ \Rightarrow (c_{\text{л}} \cdot 20\text{ }^\circ\text{C} + \lambda)\rho_{\text{сн}} &= c_{\text{рт}}\rho_{\text{рт}} \left(3 - \frac{\rho_{\text{сн}}}{\rho_{\text{в}}}\right) \cdot 25\text{ }^\circ\text{C} \end{aligned}$$

и выразим отсюда плотность снега

$$\rho_{\text{сн}} = \frac{3c_{\text{рт}}\rho_{\text{рт}} \cdot 25\text{ }^\circ\text{C}}{c_{\text{л}} \cdot 20\text{ }^\circ\text{C} + \lambda + c_{\text{рт}} \cdot 25\text{ }^\circ\text{C} \cdot \rho_{\text{рт}}/\rho_{\text{в}}} \approx 340\text{ кг}/\text{м}^3.$$

Критерии:

- 1) Записано верное уравнение теплового баланса 2 балла
- 2) Найден объём ртути, налитой в калориметр 3 балла
- 3) Получено верное выражение для плотности снега через данные из условия задачи 3 балла
- 4) Найдено числовое значение плотности снега 2 балла

Указание проверяющим: Пункт 1 оценивается полным баллом, даже если масса ртути не расписана как произведение плотности на объём.

Задача 8.3. Стержень в стене.

Однородный прямой стержень длиной 1 м вставлен на глубину 20 см в горизонтальное отверстие вертикальной стены толщиной 10 см (рис. 8.1). Если к правому концу стержня подвесить груз 2 кг, стержень будет давить на правый край отверстия (точку *A*) с силой 280 Н.

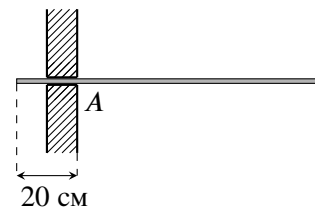


Рис. 8.1.

1. Чему равна масса стержня?
2. С какой силой стержень будет давить в точке *A*, если груз перевесить на левый конец стержня (с противоположной стороны стены)?

Отверстие считать гладким и имеющим высоту, чуть превышающую толщину стержня. Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг.

Ответ: 1) 2,5 кг; 2) 80 Н.

Решение: 1. Пусть *M* — масса стержня, а *m* — масса груза. Рассмотрим первый случай, когда груз висит на правой конце стержня. Стержень взаимодействует со стеной в двух точках: в точке *A*, где на него действует сила *N*₁, направленная вверх, и в точке *B*, где на него действует сила *N*₂, направленная вниз. Изобразим остальные силы (рис. 8.2а)— силу тяжести *Mg*, приложенную в центр (точку *C*), и вес груза (в точке *D*). Запишем правило моментов относительно точки *B*:

$$N_1 \cdot AB = Mg \cdot BC + mg \cdot BD.$$

Подставляя *AB* = 10 см, *BC* = 40 см, *BD* = 90 см и *N*₁ = 280 Н, получаем

$$N_1 \cdot 10 \text{ см} = Mg \cdot 40 \text{ см} + mg \cdot 90 \text{ см} \Rightarrow M = \frac{N_1}{4g} - \frac{9m}{4} = \frac{280 \text{ Н}}{4 \cdot 10 \text{ Н/кг}} - \frac{9 \cdot 2 \text{ кг}}{4} = 2,5 \text{ кг}.$$

2. Во втором случае груз висит на левом конце стержня (точка *E*), а силы взаимодействия со стенкой меняются на *N*'₁ и *N*'₂ соответственно (рис. 8.2б). Запишем снова правило моментов относительно точки *B* и найдём *N*'₁:

$$N'_1 \cdot AB + mg \cdot BE = Mg \cdot BC \Rightarrow N'_1 = \frac{Mg \cdot BC - mg \cdot BE}{AB} = \frac{25 \text{ Н} \cdot 40 \text{ см} - 20 \text{ Н} \cdot 10 \text{ см}}{10 \text{ см}} = 80 \text{ Н}.$$

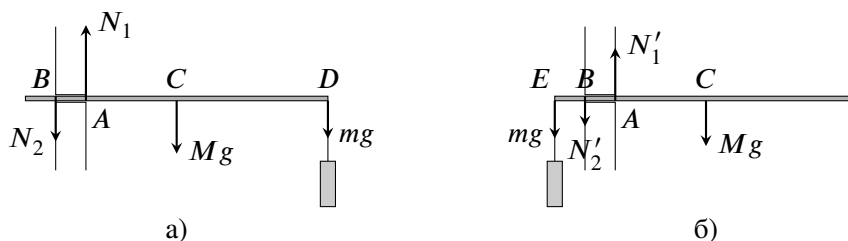


Рис. 8.2.

Критерии:

- 1) Корректно изображены силы, действующие на стержень в первом случае 1 балл
- 2) Записано правило моментов в первом случае относительно точки *B* 3 балла
- 3) Найдена масса стержня 1 балл
- 4) Корректно изображены силы, действующие на стержень во втором случае 1 балл
- 5) Записано правило моментов во втором случае относительно точки *B* 3 балла
- 6) Найдена сила *N*'₁ 1 балл

Указание проверяющим: Если учащийся пишет правило моментов относительно какой-либо другой точки (не *B*), то для каждого случая (пункты 2 и 5) верно записанное правило моментов оценивается в 2 балла, а верно записанное условие равенства равнодействующей сил нулю (или второе правило моментов) — 1 баллом.

Задача 8.4. Пара ареометров.

В двух мерных сосудах находятся одинаковые объёмы различных жидкостей: воды и какой-то неизвестной жидкости X. Мальчик Паша решил измерить плотность второй жидкости с помощью ареометра. К сожалению, оказалось, что все ареометры, имевшиеся в школьной лаборатории, разного размера, и у всех них стёрта шкала. Паша не растерялся, взял два прибора, погрузил один из них в воду, второй в жидкость X (рис. 8.3а), а потом поменял их местами (рис. 8.3б). Используя рисунки, определите массы обоих ареометров и плотность жидкости X. Плотность воды равна 1000 кг/м^3 . Для удобства первый и второй ареометры помечены на рисунках, соответственно, цифрами 1 и 2.

Примечание: Ареометр — прибор для измерения плотности жидкости.

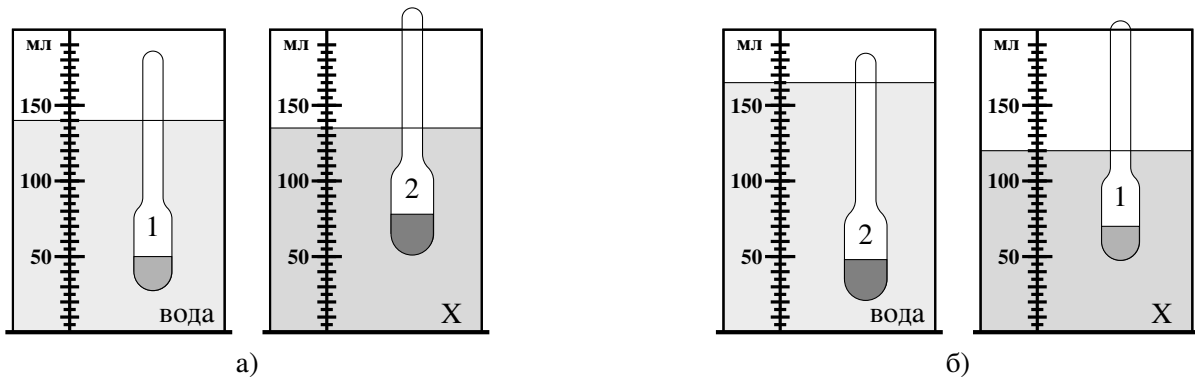


Рис. 8.3.

Ответ: $m_1 = 50 \text{ г}$, $m_2 = 75 \text{ г}$, $\rho_X = 1,67 \text{ г/см}^3$.

Решение: Пусть m_1 — масса первого ареометра, m_2 — масса второго, а V_0 — начальный объём жидкостей. Из условия плавания следует, что объём погруженной в жидкость части ареометра равен отношению массы прибора к плотности жидкости. Отсюда, используя рисунки, получим, что

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad 140 \text{ см}^3 &= V_0 + \frac{m_1}{\rho_{\text{в}}}, \quad 135 \text{ см}^3 = V_0 + \frac{m_2}{\rho_X}, \\ \text{(б)} \quad 165 \text{ см}^3 &= V_0 + \frac{m_2}{\rho_{\text{в}}}, \quad 120 \text{ см}^3 = V_0 + \frac{m_1}{\rho_X}. \end{aligned} \tag{8.4.1}$$

Вычитаем друг из друга левые и правые уравнения:

$$25 \text{ см}^3 = \frac{m_2 - m_1}{\rho_{\text{в}}}, \quad 15 \text{ см}^3 = \frac{m_2 - m_1}{\rho_X}.$$

Отсюда находим, что $m_2 - m_1 = \rho_{\text{в}} \cdot 25 \text{ см}^3 = 25 \text{ г}$ и

$$\frac{\rho_X}{\rho_{\text{в}}} = \frac{25 \text{ см}^3}{15 \text{ см}^3} \approx 1,67 \Rightarrow \rho_X = 1,67 \text{ г/см}^3.$$

Вычитаем теперь друг из друга левое верхнее и правое нижнее уравнения:

$$20 \text{ см}^3 = m_1 \left(\frac{1}{\rho_{\text{в}}} - \frac{1}{\rho_X} \right) \Rightarrow m_1 = \frac{20 \text{ см}^3}{\frac{1}{1 \text{ г/см}^3} - \frac{1}{1,67 \text{ г/см}^3}} = 50 \text{ г}.$$

Соответственно, $m_2 = 75 \text{ г}$.

Критерии:

- 1) Записаны соотношения (8.4.1) или их аналоги . . . по 1 баллу за каждое соотношение (максимум — 4 балла)
- 2) Найдены массы ареометров 3 балла
- 3) Найдена плотность неизвестной жидкости 3 балла

Указание проверяющим: Если верно найдена масса только одного прибора, за пункт 2 ставить 1 балл из трёх.

9 класс

Задача 9.1. Челночный бег.

Школьники Паша и Миша сдавали на физкультуре норматив по челночному бегу — каждому из них нужно было как можно быстрее пробежать определённую короткую дистанцию в прямом и обратном направлении в общей сложности 10 раз (5 раз туда и 5 раз обратно). Паша умеет разгоняться с ускорением a и тормозить с ускорением $3a$ (по модулю). Миша — спортсмен, он разгоняется с ускорением $2a$ и тормозит с ускорением $5a$. За какое время Паша выполнит упражнение, если Миша его выполняет за 28 с?

Ответ: $\approx 38,6$ с.

Решение: Пусть L — длина одного отрезка дистанции (всего надо пробежать десять таких отрезков). Вначале Паша разгоняется с ускорением a в течение времени t_1 , а затем тормозит с ускорением $3a$ в течение времени t_2 . Максимальная скорость Паши равна $v = at_1$, поэтому

$$0 - v = -3at_2 \Rightarrow at_1 = 3at_2 \Rightarrow t_1 = 3t_2.$$

С другой стороны,

$$L = \frac{at_1^2}{2} + vt_2 - \frac{3at_2^2}{2} = \frac{at_1^2}{2} + \frac{3at_2^2}{2} = 6at_2^2.$$

Отсюда получаем, что время, которое потратит Паша на выполнение всего упражнения, равно

$$T_{\text{П}} = 10(t_1 + t_2) = 40t_2 = 40\sqrt{\frac{L}{6a}}.$$

Продедаем аналогичные вычисления для случая Миши:

$$2at'_1 = 5at'_2 \Rightarrow t'_1 = 2,5t'_2.$$

$$T_{\text{М}} = 28 \text{ с} \Rightarrow 10(t'_1 + t'_2) = 35t'_2 = 28 \text{ с} \Rightarrow t'_2 = 0,8 \text{ с}.$$

$$L = \frac{2a(t'_1)^2}{2} + \frac{5a(t'_2)^2}{2} = \frac{35a(t'_2)^2}{4} = 5,6 \text{ с}^2 \cdot a.$$

Подставляя полученную формулу для L , находим, что

$$T_{\text{П}} = 40\sqrt{\frac{5,6 \text{ с}^2 \cdot a}{6a}} = 40 \text{ с} \cdot \sqrt{\frac{5,6}{6}} \approx 38,6 \text{ с}.$$

Критерии:

- 1) Найдено, что $t_1 = 3t_2$, или аналогичное этому соотношение (случай Паши) 1 балл
- 2) Записано, что $T_{\text{П}} = 10(t_1 + t_2)$, или аналог этого 1 балл
- 3) Найдена связь между L , a и t_1 (или t_2 , или $T_{\text{П}}$) в случае Паши 2 балла
- 4) Найдено, что $t'_1 = 2,5t'_2$, или аналогичное этому соотношение (случай Миши) 1 балл
- 5) Найдено значение t'_1 и/или t'_2 1 балл
- 6) Найдена связь между L , a и t'_1 (случай Миши) 2 балла
- 7) Найдено значение для $T_{\text{П}}$ 2 балла

Указание проверяющим: Учащийся может сразу связать L , a и $T_{\text{М}}$ для случая Миши. Любой корректный вариант оценивается полным баллом за пункты 5 и 6.

Задача 9.2. Хитрый план.

Мальчик Паша решил измерить плотность неизвестной жидкости с помощью ареометра. Однако у мальчика этой жидкости было мало, поэтому он налил в цилиндрический сосуд воды, сверху долил слой исследуемой жидкости и поместил туда прибор. Ареометр показал значение $0,93 \text{ г/см}^3$ (см. рис. 9.1). Удивившись, Паша повторил опыт, заменив слой неизвестной жидкости на слой керосина той же высоты. В этом случае прибор показал $0,95 \text{ г/см}^3$. Помогите Паше и определите плотность неизвестной жидкости. Плотность керосина равна 800 кг/м^3 , плотность воды — 1000 кг/м^3 . Площадь сечения измерительной части прибора считать постоянной.

Примечание: Ареометр — прибор для измерения плотности жидкости, в верхней, узкой части которого находится шкала. Плотность, показываемая прибором, определяется как отношение массы ареометра к объёму **всей** его погруженной части.

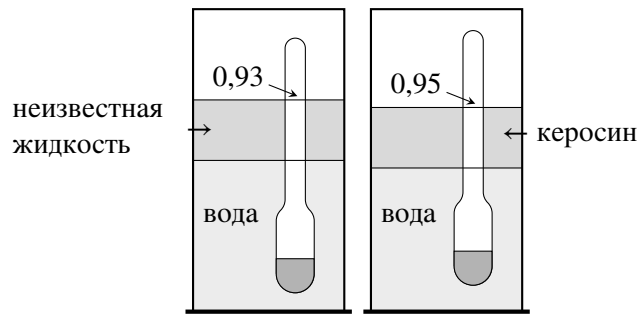


Рис. 9.1.

Ответ: $0,714 \text{ г/см}^3$.

Решение: Пусть m — масса ареометра, ρ_X — плотность неизвестной жидкости, а V — объём узкой части прибора, погруженный в верхнюю жидкость. В первом случае объём всей погруженной части равен $V_1 = m/(0,93 \text{ г/см}^3)$, а во втором — $V_2 = m/(0,95 \text{ г/см}^3)$. Запишем условия плавания ареометра в каждом случае:

$$mg = \rho_X gV + \rho_{\text{в}} g \left(\frac{m}{0,93 \text{ г/см}^3} - V \right) \Rightarrow m \left(\frac{1}{0,93} - 1 \right) = (1 \text{ г/см}^3 - \rho_X)V \quad (\text{сверху неизвестная жидкость}),$$

$$mg = \rho_{\text{к}} gV + \rho_{\text{в}} g \left(\frac{m}{0,95 \text{ г/см}^3} - V \right) \Rightarrow m \left(\frac{1}{0,95} - 1 \right) = (1 \text{ г/см}^3 - 0,8 \text{ г/см}^3)V \quad (\text{сверху керосин}).$$

Поделим эти полученные уравнения друг на друга:

$$\frac{1 \text{ г/см}^3 - \rho_X}{0,2 \text{ г/см}^3} = \frac{1/0,93 - 1}{1/0,95 - 1} \Rightarrow \rho_X = 1 \text{ г/см}^3 - \frac{7 \cdot 0,95}{5 \cdot 0,93} \cdot 0,2 \text{ г/см}^3 \approx 0,714 \text{ г/см}^3.$$

Критерии:

- 1) Записано выражение для объёма погружённой части в обоих случаях 2 балла
- 2) Записано условие плавания ареометра в первом случае 2 балла
- 3) Записано условие плавания ареометра во втором случае 2 балла
- 4) Записано уравнение для нахождения ρ_X 2 балла
- 5) Найдено значение плотности неизвестной жидкости 2 балла

Указания проверяющим: 1) Если оба выражения для объёма погруженной части написаны сразу внутри условия плавания, то пункт 1 оценивается полным баллом.

2) Уравнение в пункте 4 должно содержать только известные величины и/или числовые значения.

Задача 9.3. Ох уж это электричество!

Готовясь к экспериментальному туру олимпиады по физике, девочка Карина собрала цепь, состоящую из двух разных вольтметров, двух резисторов и идеального источника постоянного напряжения (рис. 9.2а). Уже списав показания приборов ($U_1 = 0,9 \text{ В}$, $U_2 = 1,8 \text{ В}$), девочка поняла, что допустила ошибку и пересобрала цепь (рис. 9.2б). В этом случае первый вольтметр показал $U'_1 = 5 \text{ В}$, а второй — $U'_2 = 4 \text{ В}$. Чему равно сопротивление R_2 , если $R_1 = 3 \text{ кОм}$?

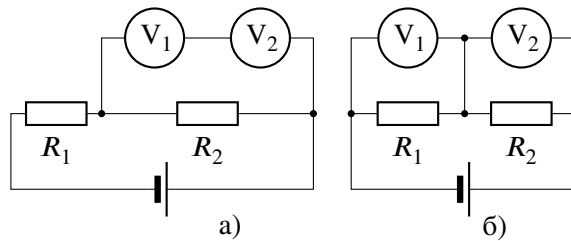


Рис. 9.2.

Ответ: 1,5 кОм.

Решение: Из показаний вольтметров в первом эксперименте следует, что сопротивление второго вдвое больше сопротивления первого: $R_{V1} = r$, $R_{V2} = 2r$. Показания приборов во втором эксперименте говорят, что напряжение на источнике равно $U'_1 + U'_2 = 9 \text{ В}$.

Рассмотрим первую цепь. Напряжение на резисторе R_1 там равно $9 \text{ В} - 2,7 \text{ В} = 6,3 \text{ В}$. Сила тока, текущего через него, равна суммарной силе тока, текущей через вольтметры и R_2 :

$$\frac{6,3 \text{ В}}{R_1} = 2,7 \text{ В} \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{3r} \right) \Rightarrow \frac{7}{R_1} = \frac{3}{R_2} + \frac{1}{r}. \tag{9.3.1}$$

Теперь запишем условие равенства суммарных токов через пары вольтметр-резистор во второй цепи:

$$5 \text{ В} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{r} \right) = 4 \text{ В} \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{2r} \right) \Rightarrow \frac{5}{R_1} + \frac{5}{r} = \frac{4}{R_2} + \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{5}{R_1} + \frac{3}{r} = \frac{4}{R_2}. \tag{9.3.2}$$

Исключая из полученных уравнений сопротивление вольтметра r , получим

$$\frac{5}{R_1} + 3 \cdot \left(\frac{7}{R_1} - \frac{3}{R_2} \right) = \frac{4}{R_2} \Rightarrow \frac{26}{R_1} = \frac{13}{R_2} \Rightarrow R_2 = \frac{R_1}{2} = 1,5 \text{ кОм}.$$

Критерии:

- 1) Найдено соотношение между сопротивлениями вольтметров 1 балл
- 2) Найдено напряжение источника 1 балл
- 3) Записано условие равенство токов для первой цепи (9.3.1) или его аналог 3 балла
- 4) Записано условие равенство токов для второй цепи (9.3.2) или его аналог 3 балла
- 5) Найдено значение R_2 2 балла

Задача 9.4. Больше и меньше.

Девочка Маша взяла из морозилки кусок льда при $-30\text{ }^\circ\text{C}$, положила его на дно калориметра и, чтобы лёд не всплыл, накрыла сверху тонкой сеткой. Затем она налила в калориметр 120 г воды при $+15\text{ }^\circ\text{C}$. После установления теплового равновесия оказалось, что уровень воды понизился. Девочка повторила свой опыт, взяв такой же по массе кусок льда и налив то же самое количество воды, но уже при температуре $+5\text{ }^\circ\text{C}$. Когда снова установилось равновесие, Маша обнаружила, что на этот раз уровень воды повысился. Каковы стали конечные массы льда в обоих опытах, если изменение уровня воды (по величине) в них было одинаковым, а установившаяся температура оба раза была $0\text{ }^\circ\text{C}$. Стенки калориметра считать вертикальными, вода в эксперименте полностью покрывает лёд. Тепловыми потерями, теплоёмкостью калориметра и сетки пренебречь. Удельная теплоёмкость воды равна $4200\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$, льда — $2100\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$, удельная теплота плавления льда — $330\text{ кДж}/\text{кг}$.

Ответ: 72,4 г и 87,6 г.

Решение: Уровень воды изменяется из-за того, часть льда превращается в воду (или, наоборот, вода превращается в лёд). Изменение объёма связано с изменением плотности и зависит от массы вещества, испытывающего переход ($\Delta V = m/\rho_{\text{л}} - m/\rho_{\text{в}}$). Поэтому, так как уровень в обоих экспериментах меняется на одну и ту же величину, масса растаявшего льда в первом случае и масса замёрзшей воды во втором равны между собой.

Пусть эта масса равна m , а начальная масса льда — M . Запишем уравнение теплового баланса для обоих случаев:

$$c_{\text{л}}M \cdot 30\text{ }^\circ\text{C} + \lambda m = c_{\text{в}} \cdot 0,12\text{ кг} \cdot 15\text{ }^\circ\text{C} \quad (\text{первый опыт}),$$

$$c_{\text{л}}M \cdot 30\text{ }^\circ\text{C} = c_{\text{в}} \cdot 0,12\text{ кг} \cdot 5\text{ }^\circ\text{C} + \lambda m \quad (\text{второй опыт}).$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$2c_{\text{л}}M \cdot 30\text{ }^\circ\text{C} = c_{\text{в}} \cdot 0,12\text{ кг} \cdot 20\text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow M = \frac{c_{\text{в}} \cdot 0,12\text{ кг} \cdot 20\text{ }^\circ\text{C}}{2c_{\text{л}} \cdot 30\text{ }^\circ\text{C}} = \frac{4200\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C}) \cdot 0,12\text{ кг} \cdot 20\text{ }^\circ\text{C}}{2 \cdot 2100\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C}) \cdot 30\text{ }^\circ\text{C}} = 0,08\text{ кг}.$$

Найдём теперь массу m :

$$m = \frac{c_{\text{в}} \cdot 0,12\text{ кг} \cdot 15\text{ }^\circ\text{C} - c_{\text{л}}M \cdot 30\text{ }^\circ\text{C}}{\lambda} = \frac{4200\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C}) \cdot 0,12\text{ кг} \cdot 15\text{ }^\circ\text{C} - 2100\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C}) \cdot 0,08\text{ кг} \cdot 30\text{ }^\circ\text{C}}{330000\text{ Дж}/\text{кг}} \approx 0,0076\text{ кг} = 7,6\text{ г}.$$

В результате, в первом опыте масса льда уменьшается на 7,6 г и становится равной 72,4 г, а во втором увеличивается до 87,6 г.

Критерии:

- 1) Корректно обосновано, что масса растаявшего льда в случае 1 и замёрзшей воды в случае 2 равны . . . 3 балла
- 2) Записано первое уравнение теплового баланса 2 балла
- 3) Записано второе уравнение теплового баланса 2 балла
- 4) Найдена начальная масса льда 1 балл
- 5) Найдено изменение массы льда m 1 балл
- 6) Дан правильный ответ 1 балл

Указание проверяющим: В случае некорректного или отсутствующего объяснения равенства масс остальные пункты оцениваются независимо.

Задача 9.5. Разные механизмы.

С помощью системы, состоящей из трёх одинаковых блоков (рис. 9.3а), поднимают груз массой $M = 120$ кг, прикладывая к свободному концу верёвки силу, равную $F_1 = 440$ Н. Какую минимальную силу F_2 нужно прикладывать для подъёма того же груза в системе, состоящей из четырёх таких же блоков (рис. 9.3б)? Верёвки считать невесомыми и нерастяжимыми. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с².



Рис. 9.3.

Ответ: 360 Н.

Решение: Так как верёвка, перекинута через блоки, невесома, то её сила натяжения одинакова по всей длине и равна по величине силе, с которой её тянут за свободный конец (рис. 9.4). Пусть m — масса блока, тогда

$$3F_1 = mg + Mg, \quad 4F_2 = 2mg + Mg.$$

Из первого уравнения находим массу блока: $m = 3F_1/g - M = 132$ кг – 120 кг = 12 кг. Тогда из второго уравнения получим, что $F_2 = (2mg + Mg)/4 = (240$ Н + 1200 Н)/ $4 = 360$ Н.



Рис. 9.4.

Критерии:

- 1) Найден «выигрыш в силе», который даёт механизм в первом случае 2 балла
- 2) Найден «выигрыш в силе», который даёт механизм во втором случае 2 балла
- 3) Записана формула $3F_1 = mg + Mg$ или её аналог 2 балла
- 4) Записана формула $4F_2 = 2mg + Mg$ или её аналог 2 балла
- 5) Найдено значение F_2 2 балла

Указания проверяющим: Обоснование величины выигрыша в силе (в первом случае — в три раза, во втором — в четыре) может быть сделано просто в виде рисунка/-ов (см. рис. 9.4). В этом случае баллы за пункты 1 и/или 2 выставляются. Ученик также может использовать **альтернативный** способ обоснования — через «золотое правило механики» (метод виртуальных перемещений).

10 класс

Задача 10.1. Шайбы на столе.

На горизонтальном столе находятся две маленькие шайбы с массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг, связанные между собой невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый горизонтальный блок. Блок тянут с силой F (на рис. 10.1 изображён вид сверху). Определите ускорение блока в двух случаях: 1) $F = 10$ Н и 2) $F = 16$ Н. Коэффициент трения между шайбами и столом равен $\mu = 0,3$. Отрезки нити, соединяющие шайбы и блок, горизонтальны, параллельны друг другу и направлению силы F . Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 .

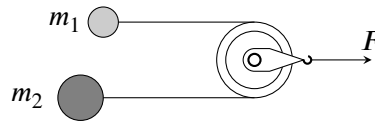


Рис. 10.1.

Ответ: 1) 1 м/с^2 ; 2) 3 м/с^2 .

Решение: 1. Так как блок и нить невесомы, то сила натяжения нити, тянущая каждую шайбу, равна $F/2$. Максимальная сила трения между первой шайбой и столом равна $F_{\text{тр}1} = \mu m_1 g = 3$ Н, между второй шайбой и столом — $F_{\text{тр}2} = \mu m_2 g = 6$ Н.

Найдём связь между ускорениями шайб a_1 и a_2 и ускорением блока $a_{\text{бл}}$. Для этого перейдём в систему отсчёта блока. В ней шайбы должны двигаться с равными по величине, но противоположными по направлению ускорениями:

$$a_1 - a_{\text{бл}} = a_{\text{бл}} - a_2.$$

Отсюда получаем, что $a_{\text{бл}} = (a_1 + a_2)/2$.

2. В первом случае $F/2 = 5$ Н, что больше, чем $F_{\text{тр}1}$, но меньше, чем $F_{\text{тр}2}$. Это значит, что вторая шайба не сможет сдвинуться! Найдём ускорение первой шайбы:

$$m_1 a_1 = \frac{F}{2} - F_{\text{тр}1} = 2 \text{ Н} \Rightarrow a_1 = 2 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно, в первом случае $a_{\text{бл}} = a_1/2 = 1 \text{ м/с}^2$.

3. Во втором случае $F/2 = 8$ Н, что превышает и $F_{\text{тр}1}$, и $F_{\text{тр}2}$. Найдём ускорения обоих грузов:

$$m_1 a_1 = \frac{F}{2} - F_{\text{тр}1} = 5 \text{ Н} \Rightarrow a_1 = 5 \text{ м/с}^2,$$

$$m_2 a_2 = \frac{F}{2} - F_{\text{тр}2} = 2 \text{ Н} \Rightarrow a_2 = 1 \text{ м/с}^2.$$

Поэтому, во втором случае $a_{\text{бл}} = (a_1 + a_2)/2 = 3 \text{ м/с}^2$.

Критерии:

- 1) Указано, что сила натяжения нити равна $F/2$ 1 балл
- 2) Обосновано, что в первом случае шайба m_2 не движется 2 балла
- 3) Найдено ускорение шайбы m_1 в первом случае 1 балл
- 4) Найдено ускорение блока в первом случае 1 балл
- 5) Найдены ускорения шайб во втором случае по 1 баллу за каждое (в сумме 2 балла)
- 6) Обосновано, что $a_{\text{бл}} = (a_1 + a_2)/2$ 2 балла
- 7) Найдено ускорение блока во втором случае 1 балл

Указания проверяющим: 1) В пункте 1 достаточно любого указания на то, что сила натяжения равна $F/2$.
 2) Если нет обоснования формулы $a_{\text{бл}} = (a_1 + a_2)/2$, за пункт 6 баллы не ставить, а остальные пункты оценивать независимо.
 3) Обоснование может быть произведено отличным от авторского способом, например, с помощью сравнения перемещений шайб и блока.

Задача 10.2. Дерево снизу.

Длинную тонкостенную трубку радиусом $r = 0,5$ см, закрытую снизу однородной круглой пластиной из дерева, аккуратно погружают в воду на глубину $h = 4$ см (рис. 10.2). Толщина пластины равна $d = 1$ см, её радиус $R = 3$ см. В трубку сверху аккуратно наливают керосин. При какой минимальной высоте керосина H пластина оторвётся от трубки? Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м³, плотность дерева $\rho_д = 600$ кг/м³, плотность керосина $\rho_к = 800$ кг/м³. Вода между трубкой и пластиной не проникает, жидкости в дерево не впитываются. Центр пластины лежит на оси трубки.

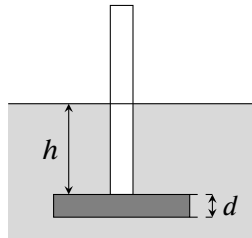


Рис. 10.2.

Ответ: 23 см.

Решение: На деревянную пластину действуют направленные вниз сила давления воды сверху, сила давления керосина и сила тяжести и направленная вверх сила давления воды снизу. Запишем условие равновесия пластины:

$$\rho_к g H \cdot \pi r^2 + \rho_в g h \cdot (\pi R^2 - \pi r^2) + mg = \rho_в g (h + d) \cdot \pi R^2.$$

Масса пластины равна $m = \rho_д \cdot \pi R^2 \cdot d$. Подставляя её в условие равновесия и сокращая общие множители, получаем

$$\begin{aligned} \rho_к H r^2 + \rho_в h \cdot (R^2 - r^2) + \rho_д d R^2 &= \rho_в (h + d) R^2 \Rightarrow \rho_к H r^2 = (\rho_в - \rho_д) d R^2 + \rho_в h r^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow H &= \frac{(\rho_в - \rho_д) d R^2 + \rho_в h r^2}{\rho_к r^2} = \frac{0,4 \text{ г/см}^3 \cdot 1 \text{ см} \cdot (3 \text{ см})^2 + 1 \text{ г/см}^3 \cdot 4 \text{ см} \cdot (0,5 \text{ см})^2}{0,8 \text{ г/см}^3 \cdot (0,5 \text{ см})^2} = 23 \text{ см}. \end{aligned}$$

Критерии:

- 1) Записана формула для массы пластины $m = \rho_д d \cdot \pi R^2$ 1 балл
- 2) Записана формула для силы давления воды сверху $\rho_в g h \cdot (\pi R^2 - \pi r^2)$ 2 балла
- 3) Записана формула для силы давления воды снизу $\rho_в g (h + d) \cdot \pi R^2$ 2 балла
- 4) Записана формула для силы давления керосина $\rho_к g H \cdot \pi r^2$ 2 балла
- 5) Записано условие равновесия пластины 1 балл
- 6) Найдена высота слоя керосина H 2 балла

Указания проверяющим: Формулы из пунктов 1-4 могут быть сразу записаны в условие равновесия пластины. Если формулы приведены верно, соответствующие пункты оценивать полным баллом.

Задача 10.3. Новогодние эксперименты.

Экспериментатор Иннокентий Иванов решил подготовиться к Новому году и сделать праздничную гирлянду. Он взял источник постоянного напряжения, резистор сопротивлением R и большой набор одинаковых ламп, чьи сопротивления r не зависят от протекающего через них тока. Испытания показали, что при использовании в гирлянде только одной лампы, на ней выделяется мощность, равная 60 Вт. Если же использовать две лампы, то на них (в сумме) будет выделяться 97,2 Вт.

1. Чему равно отношение R/r ?
 2. Сколько ламп должно быть в гирлянде, чтобы их суммарная мощность снова была равна 60 Вт?
- В гирлянде источник, резистор и лампы соединяются между собой последовательно. Источник считать идеальным.

Ответ: 1) $R/r = 8$; 2) 64.

Решение: Пусть U — напряжение на источнике. Если в гирлянде использовано N ламп, ток текущий в цепи равен $I = U/(R + Nr)$. Суммарная мощность, выделяющаяся на лампах, составляет

$$P_N = I^2 \cdot Nr = \frac{U^2 Nr}{(R + Nr)^2}.$$

По условию $P_1 = 60$ Вт, $P_2 = 97,2$ Вт, следовательно

$$\begin{cases} U^2 r / (R + r)^2 = 60 \text{ Вт,} \\ 2U^2 r / (R + 2r)^2 = 97,2 \text{ Вт} \end{cases} \Rightarrow \frac{2(R + r)^2}{(R + 2r)^2} = \frac{97,2}{60} \Rightarrow \frac{R + r}{R + 2r} = 0,9 \Rightarrow R = 8r.$$

Если $P_N = P_1$, то

$$\begin{aligned} \frac{U^2 Nr}{(R + Nr)^2} = \frac{U^2 r}{(R + r)^2} &\Rightarrow \frac{U^2 Nr}{(8r + Nr)^2} = \frac{U^2 r}{(9r)^2} \Rightarrow \frac{N}{(8 + N)^2} = \frac{1}{81} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 81N = (N + 8)^2 \Rightarrow N^2 - 65N + 64 = 0. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения, отличное от $N = 1$, есть $N = 64$.

Критерии:

- | | |
|------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 1) Записано выражение для мощности одной лампы $U^2 r / (R + r)^2$ | 1 балл |
| 2) Записано выражение для мощности двух ламп $2U^2 r / (R + 2r)^2$ | 1 балл |
| 3) Найдено отношение R/r | 3 балла |
| 4) Записано уравнение $NU^2 r / (R + Nr)^2 = U^2 r / (R + r)^2$ | 2 балла |
| 5) Записано уравнение $N^2 - 65N + 64 = 0$ или аналог | 2 балла |
| 6) Найдено значение $N = 64$ | 1 балл |

Задача 10.4. В отрыв.

Тонкий однородный деревянный стержень, нижний конец которого упирается в дно сосуда, удерживается в положении, изображённом на рис. 10.3, с помощью вертикальной нити, привязанной к его верхнему концу. В сосуд медленно наливают воду. При какой толщине слоя воды h нижний конец стержня оторвётся ото дна? Точка крепления нити к стержню находится на высоте H относительно дна сосуда. Плотность дерева, из которого сделан стержень, равна 640 кг/м^3 , плотность воды — 1000 кг/м^3 .

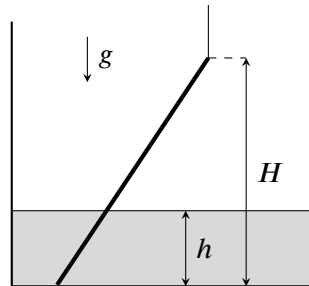


Рис. 10.3.

Ответ: $h = 2H/5$.

Решение: На стержень действуют (в общем случае) 4 силы: сила тяжести mg , где m — масса стержня, приложенная к его середине; сила Архимеда, приложенная с середине погруженной части; сила натяжения нити T и сила реакции со стороны дна N . Когда нижний конец стержня отрывается ото дна, $N = 0$. Запишем правило моментов относительно точки подвеса стержня (точки O):

$$mg \cdot \frac{H}{2} \operatorname{tg} \alpha = F_A \left(H - \frac{h}{2} \right) \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол между стержнем и вертикалью. Запишем выражения для массы стержня и силы Архимеда (S — площадь поперечного сечения):

$$m = \frac{\rho_d S H}{\cos \alpha}, \quad F_A = \frac{\rho_B g S h}{\cos \alpha}$$

и подставим их в правило моментов

$$\frac{\rho_d g S H^2}{2 \cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho_B g S h}{\cos \alpha} \cdot \left(H - \frac{h}{2} \right) \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \rho_d H^2 = \rho_B h(2H - h) \Rightarrow 0,64H^2 = h(2H - h).$$

Решая полученное уравнение, находим h

$$h^2 - 2hH + 0,64H^2 = 0 \Rightarrow h = 0,4H \text{ или } h = 1,6H.$$

Выбираем корень, который меньше H , и получаем $h = 0,4H$.

Критерии:

- 1) Корректно изображены силы, действующие на стержень 1 балл
- 2) Записано выражение для массы стержня 1 балл
- 3) Записано выражение силы Архимеда 1 балл
- 4) Записано правило моментов относительно точки O 3 балла
- 5) Записано уравнение $h^2 - 2hH + 0,64H^2 = 0$ или аналог 2 балла
- 6) Найдена высота h 2 балла

Указание проверяющим: Если учащийся пишет правило моментов относительно какой-либо другой точки (не O), то для пункта 4 верно записанное правило моментов оценивается в 2 балла, а верно записанное условие равенства равнодействующей сил нулю (или второе правило моментов) — 1 баллом.

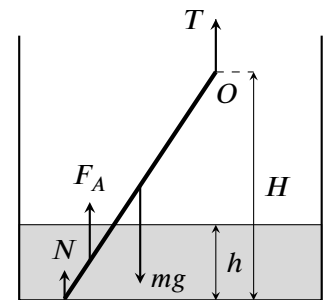


Рис. 10.4.

Задача 10.5. Тень от камня.

От основания вертикального фонаря высотой $H = 9,8$ м бросили камень со скоростью $v_0 = 12$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту (рис. 10.5). На какое максимальное расстояние от фонаря сместится тень камня во время его полёта, если других источников света в округе нет. Фонарь считать точечным источником, поверхность земли горизонтальной, а сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с².

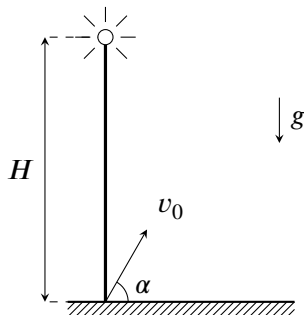


Рис. 10.5.

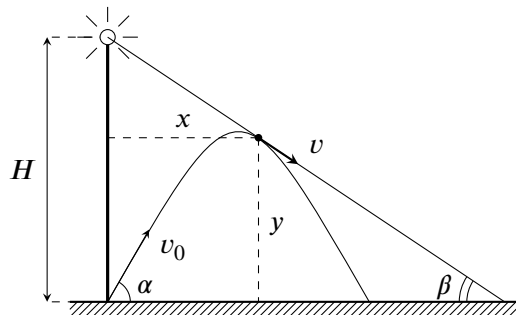


Рис. 10.6.

Ответ: 16,3 м.

Решение: Пусть L — искомое максимальное смещение тени. Тень от фонаря смещается на максимальное расстояние, когда соответствующий луч, идущий от фонаря, будет идти по касательной к траектории камня (см. рис. 10.6). Пусть t — время от момента броска, за которое камень оказался в точке касания. Тогда

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2},$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Вектор скорости камня всегда направлен по касательной к траектории, следовательно он направлен вдоль луча, изображённого на рис. 10.6. Посчитаем тангенс угла наклона β этого луча к горизонту двумя способами:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H - y}{x} = \frac{|v_y|}{v_x} \Rightarrow \frac{H - v_0 t \sin \alpha + gt^2/2}{v_0 t \cos \alpha} = \frac{gt - v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow H = \frac{gt^2}{2}.$$

Отсюда получаем, что $t = \sqrt{2H/g} = 1,4$ с. Тангенс β , соответственно, равен

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{gt - v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} \approx \frac{14 - 10,4}{6} \approx 0,6.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{L} \Rightarrow L = \frac{H}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{9,8 \text{ м}}{0,6} \approx 16,3 \text{ м}.$$

Критерии:

- 1) Записаны законы движения камня $x(t)$ и $y(t)$ 0,5 балла
- 2) Записаны законы скорости камня $v_x(t)$ и $v_y(t)$ 0,5 балла
- 3) Указано, что максимальное смещение тени происходит при касании луча и траектории 2 балла
- 4) Записано уравнение $(H - y)/x = |v_y|/v_x$ или его аналог 3 балла
- 5) Найдено время в точке касания 2 балла
- 6) Найдено максимальное смещение камня L 2 балла

Указание проверяющим: 1) В пункте 4 должно быть приведено верное соотношение, связывающее скорость камня и координаты в точке касания луча и траектории.

2) В пункте 5 достаточно привести формулу для t , нахождение числового значения не является обязательным.

11 класс

Задача 11.1. Половина на половину.

С вертикальной стены высотой H бросили в горизонтальном направлении камень (рис. 11.1). Наблюдатель, стоящий у подножия стены точно под точкой бросания, заметил, что камень приближался к нему в течение ровно половины времени своего полёта. Определите начальную скорость камня v , его дальность полёта L и угол α , под которым камень упадёт на землю. Поверхность земли горизонтальна. Размерами наблюдателя и сопротивлением воздуха пренебречь.

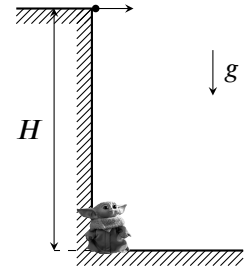


Рис. 11.1.

Ответ: $v = \sqrt{3gH/4}$, $L = H\sqrt{3/2}$, $\alpha = \arctg \sqrt{8/3} \approx 69^\circ$.

Решение: *Способ №1.* Поместим начало координат в месте нахождения наблюдателя и запишем зависимость координат камня от времени

$$x(t) = vt, \quad y(t) = H - gt^2/2.$$

Расстояние r от камня до наблюдателя находим с помощью теоремы Пифагора:

$$r^2 = x^2 + y^2 = v^2t^2 + (H - gt^2/2)^2 \Rightarrow r^2 = H^2 + (v^2 - gH)t^2 + g^2t^4/4.$$

Найдём точку максимума расстояния $t_m \neq 0$:

$$(r^2)' = 0 \Rightarrow 2t_m(v^2 - gH) + g^2t_m^3 = 0 \Rightarrow t_m^2 = 2(gH - v^2)/g^2.$$

С другой стороны, по условию $t_m = \frac{1}{2}t_{\text{полёта}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Отсюда

$$\frac{2(gH - v^2)}{g^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2H}{g} \Rightarrow 4(gH - v^2) = gH \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3gH}{4}}.$$

Дальность полёта равна

$$L = vt_{\text{полёта}} = \sqrt{3gH/4} \cdot \sqrt{2H/g} = H\sqrt{3/2}.$$

Угол с горизонтом, под которым упадёт камень — угол между вектором скорости и поверхностью земли:

$$\tg \alpha = \frac{gt_{\text{полёта}}}{v} = \sqrt{8/3} \Rightarrow \alpha \approx 69^\circ.$$

Способ №2. Поместим начало координат в месте нахождения наблюдателя. Вектор скорости камня u в точке максимального удаления перпендикулярен радиус-вектору этой точки (рис. 11.2). Время, за которое камень попадёт в эту точку, равно половине времени полёта $t_m = \frac{1}{2}t_{\text{полёта}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Так как вектор скорости перпендикулярен радиус-вектору, то

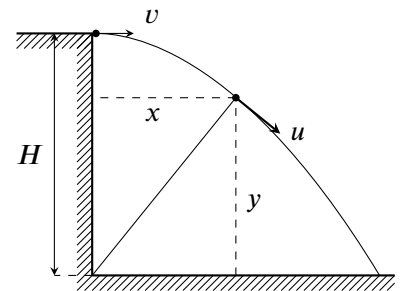


Рис. 11.2.

$$\frac{y}{x} = \frac{u_x}{|u_y|} \Rightarrow \frac{H - gt_m^2/2}{vt_m} = \frac{v}{gt_m} \Rightarrow v^2 = g \left(H - \frac{gt_m^2}{2} \right) = \frac{3gH}{4} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3gH}{4}}.$$

Нахождение L и α аналогично Способу №1.

Критерии (для способа №1):

- 1) Записан закон изменения расстояния от наблюдателя $r(t)$ 2 балла
- 2) Записана формула для t_m 1 балл
- 3) Найдена точка максимума $r(t)$ 2 балла
- 4) Найдена начальная скорость v 2 балла
- 5) Найдено выражение для L 2 балла
- 6) Найдено значение α 1 балл

Критерии (для способа №2):

- 1) Указано, что в точке максимального удаления радиус-вектор перпендикулярен скорости 1 балл
- 2) Записана формула для t_m 1 балл
- 3) Записано условие $y/x = u_x/|u_y|$ или аналог 3 балла
- 4) Найдена начальная скорость v 2 балла
- 5) Найдено выражение для L 2 балла
- 6) Найдено значение α 1 балл

Задача 11.2. Цепь с конденсатором.

Определите установившийся заряд конденсатора в цепи, изображённой на рис. 11.3, если $\mathcal{E}_1 = 1 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 3 \text{ В}$, $\mathcal{E}_3 = 8 \text{ В}$, $r_1 = 6 \text{ Ом}$, $r_2 = 4 \text{ Ом}$, $C = 3300 \text{ мкФ}$. Внутренним сопротивлением батареек пренебречь.

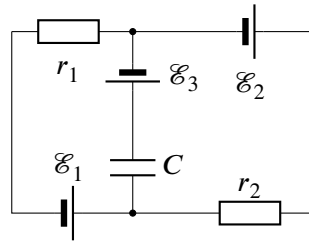


Рис. 11.3.

Ответ: 0,019 Кл.

Решение: В установившемся режиме ток в цепи конденсатора не течёт. Пусть I — ток, текущий во внешнем контуре (направление — по часовой стрелке). Тогда

$$I(r_1 + r_2) = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{r_1 + r_2} = \frac{2 \text{ В}}{10 \text{ Ом}} = 0,2 \text{ А}.$$

Запишем 2ое правило Кирхгофа для, например, левого контура (направление обхода — по часовой стрелке):

$$U_C + Ir_1 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1$$

и найдём напряжение на конденсаторе

$$U_C = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 - Ir_1 = 8 \text{ В} - 1 \text{ В} - 0,2 \text{ А} \cdot 6 \text{ Ом} = 5,8 \text{ В}.$$

Заряд на этом конденсаторе равен

$$q = CU_C = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ Ф} \cdot 5,8 \text{ В} \approx 0,019 \text{ Кл}.$$

Критерии:

- 1) Найден ток во внешнем контуре 4 балла
- 2) Найдено напряжение на конденсаторе 4 балла
- 3) Вычислен заряд на конденсаторе 2 балла

Указания проверяющим: 1) Напряжение на конденсаторе (и, как следствие, заряд) могут быть приведены с противоположным знаком. На выставяемый балл это не влияет.

2) Приводить числовые значения в пунктах 1 и 2 необязательно, достаточно верных формул.

Задача 11.3. Стержень на опоре.

Тонкий однородный стержень длиной $L = 60$ см лежит на вертикальной опоре высотой $h = 30$ см, своим левым концом упираясь в горизонтальную поверхность стола (рис. 11.4). При каком наименьшем коэффициенте трения μ между стержнем и столом стержень будет находиться в равновесии, если точка его касания с поверхностью стола расположена на расстоянии $s = 40$ см от опоры? Трения между опорой и стержнем нет, толщиной опоры пренебречь.

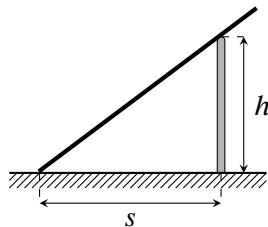


Рис. 11.4.

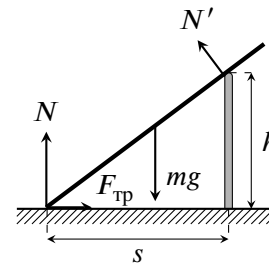


Рис. 11.5.

Ответ: $\mu = 36/77 \approx 0,47$.

Решение: Пусть m — масса стержня, а α — угол между стержнем и поверхностью стола. Из данных в условии задачи находим, что $\sin \alpha = 3/5$ и $\cos \alpha = 4/5$. Изобразим силы, действующие на стержень (рис. 11.5) и запишем условия равенства равнодействующей всех сил нулю:

$$\begin{cases} F_{\text{тр}} = N' \sin \alpha, \\ N + N' \cos \alpha = mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{\text{тр}} = 3N'/5, \\ N + 4N'/5 = mg \end{cases}$$

и правило моментов относительно точки упора стержня в стол

$$N' \sqrt{s^2 + h^2} = mg \cdot \frac{L \cos \alpha}{2} \Rightarrow N' \cdot 50 \text{ см} = mg \cdot 24 \text{ см} \Rightarrow N' = \frac{12mg}{25}.$$

Выразим силу трения и силу реакции N через mg :

$$N + \frac{4}{5} \cdot \frac{12mg}{25} = mg \Rightarrow N = \frac{77mg}{125},$$

$$F_{\text{тр}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{12mg}{25} = \frac{36mg}{125}.$$

Если коэффициент трения минимален, то $F_{\text{тр}} = \mu N$. Отсюда находим, что

$$\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{36}{77} \approx 0,47.$$

Критерии:

- 1) Корректно изображены силы, действующие на стержень 1 балл
- 2) Записана формула $F_{\text{тр}} = \mu N$ 1 балл
- 3) Записано условие равенства сил в проекции на 2 оси 4 балла (по 2 балла за проекцию)
- 4) Записано правило моментов 2 балла
- 5) Найдено значение μ 2 балла

Указания проверяющим: 1) Сила трения может быть сразу записана как $F_{\text{тр}} = \mu N$ в уравнениях из пунктов 3 и 4. В этом случае балл за пункт 2 выставляется.

2) Ответ зачитывать как в виде десятичной дроби, так и в виде обыкновенной.

3) Учащийся может в пункте 3 вместо одного или обоих равенств записать правило моментов относительно одной (или двух) точек, отличных от взятой в пункте 4. В этом случае каждое корректное и **независимое** уравнение оценивается 2 баллами (но не более 4 баллов за пункт).

Задача 11.4. Блок с пружинами.

В системе, изображённой на рис. 11.6, обе пружины горизонтальны, своим левым концом прикреплены к стене, а их правые концы соединены нитью, перекинутой через невесомый блок. Жёсткость одной пружины равна k , другой — $2k$, и в начальный момент они не деформированы. Какую работу A нужно совершить, чтобы медленно переместить блок вправо на расстояние x ? Пружины считать невесомыми, а нить — невесомой и нерастяжимой. Трение между нитью и блоком отсутствует.

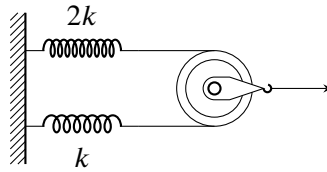


Рис. 11.6.

Ответ: $A = 4kx^2/3$.

Решение: Пусть при перемещении оси блока на x длина верхней пружины увеличивается на x_1 , а нижней — на x_2 . Так как пружины связаны между собой невесомой нитью, силы их натяжения равны:

$$2kx_1 = kx_2 \Rightarrow x_2 = 2x_1.$$

Из-за движения блока суммарная длина пружин увеличивается на $2x$:

$$x_1 + x_2 = 2x \Rightarrow 3x_1 = 2x \Rightarrow x_1 = \frac{2x}{3}, x_2 = \frac{4x}{3}.$$

Работа по перемещению блока на x равна изменению потенциальной энергии пружин:

$$A = \frac{2kx_1^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} = \frac{4kx^2}{9} + \frac{8kx^2}{9} = \frac{4kx^2}{3}.$$

Критерии:

- 1) Получена связь между удлинениями пружин 2 балла
- 2) Записано соотношение $x_1 + x_2 = 2x$ или его аналог 3 балла
- 3) Найдены удлинения обеих пружин $x_1 = 2x/3, x_2 = 4x/3$ 2 балла
- 4) Записана формула для работы через x_1 и x_2 1 балл
- 5) Найдено выражение для работы $A = 4kx^2/3$ 2 балла

Задача 11.5. Утечка в сосуде.

Герметичный сосуд состоит из двух горизонтальных цилиндрических частей разного сечения, перекрытых двумя поршнями, соединёнными между собой жёстким стержнем. Начальное положение поршней и размеры показаны на рис. 11.7. Между торцами сосуда и ближайшими поршнями находится азот, причём давление газа слева в 1,2 раза выше, чем справа. Снаружи сосуда и между поршнями — вакуум. В некоторый момент в левом торце сосуда появилась микротрещина, и газ стал медленно выходить наружу. Когда из левой части сосуда вышло $4/9$ находившегося там азота, поршни начали смещаться. Насколько они сместятся, если оттуда выйдет ещё такое же количество газа? Длина стержня больше L . Считать, что температура азота в обеих частях сосуда одинакова и остаётся постоянной в течение всего процесса. Трение между поршнями и стенками сосуда отсутствует.

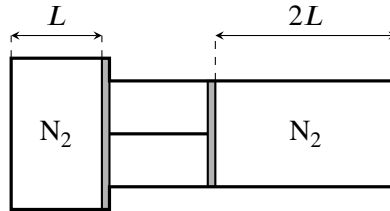


Рис. 11.7.

Ответ: $8L/11$.

Решение: Пусть p_0 — давление азота в правой части сосуда. Тогда $6p_0/5$ — давление в левой части. Когда оттуда выйдет $4/9$ от первоначального количества газа ν , давление азота в левой части упадёт до

$$p_1 = \frac{5}{9} \cdot \frac{6p_0}{5} = \frac{2p_0}{3}.$$

Поршни начнут смещаться тогда, когда **сила** давления газа на левый поршень сравняется с силой давления газа на правый. Если S_1 и S_2 — площади левого и правого поршней, то

$$p_1 S_1 = p_0 S_2 \Rightarrow \frac{2p_0 S_1}{3} = p_0 S_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}.$$

Когда из левой части выйдет ещё $4\nu/9$ газа, поршень сдвинется влево на расстояние x . Обозначим p'_1 и p'_2 новые давления в левой и правой частях сосуда. Запишем закон Менделеева-Клапейрона для обеих частей:

$$\begin{cases} p'_1 S_1 (L - x) = \frac{1}{9} \nu RT, \\ \frac{6}{5} p_0 S_1 L = \nu RT \end{cases} \Rightarrow p'_1 (L - x) = \frac{2}{15} p_0 L \quad (\text{левая часть}),$$

$$p'_2 (2L + x) = p_0 \cdot 2L \quad (\text{правая часть}).$$

Так как $p'_1 S_1 = p'_2 S_2$, то $p'_2 = 3p'_1/2$. Отсюда

$$\begin{cases} p'_1 (L - x) = \frac{2}{15} p_0 L, \\ \frac{3}{2} p'_1 (2L + x) = p_0 \cdot 2L \end{cases} \Rightarrow p'_1 (L - x) = \frac{1}{15} \cdot \frac{3}{2} p'_1 (2L + x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10(L - x) = 2L + x \Rightarrow x = \frac{8L}{11}.$$

Критерии:

- 1) Найдено давление в левом сосуде после первой утечки 1 балл
- 2) Найдено отношение площадей поршней 2 балла
- 3) Записан закон Бойля-Мариотта для правого сосуда (после второй утечки) 2 балла
- 4) Получено уравнение $p'_1 (L - x) = \frac{2}{15} \cdot p_0 L$ или его аналог 3 балла
- 5) Найдено смещение поршня x 2 балла